

柯江. 一种矩形板塑性极限分析的新方法. 塑性工程学报, 2019, 26(3): 218-222.  
Jiang Ke. A new method of plastic limit analysis for rectangular plates.  
Journal of Plasticity Engineering, 2019, 26(3): 218-222.

DOI: [10.3969/j.issn.1007-2012.2019.03.031](https://doi.org/10.3969/j.issn.1007-2012.2019.03.031)

**注意:** 提高非线性计算收敛性的有效措施包括: (1)如果固体边界的局部区域(如集中荷载或铰支座的作用点)的应力非常集中, 则将该局部区域的杆件的材料改为线弹性; (2)在软件的求解控制中, 可以考虑打开稳定设置。(Note: Effective measures to improve the convergence of nonlinear calculations include: (1) If the stress in the local area of the solid boundary (such as the action point of the concentrated load or the hinged support) is very concentrated, change the material of the bars in that local area to linear elastic; (2) In the solution control of the software, consider turning on the stabilization setting.)

## 一种矩形板塑性极限分析的新方法

柯 江

(陕西理工大学 土木工程与建筑学院, 陕西 汉中 723001)

**摘 要:** 基于一种固体的新单元模型进行了板的塑性极限分析, 该新单元模型是一个由 24 根杆件组成的桁架。以均布荷载作用下的简支正方形板与矩形板为例, 通过新单元法与经典塑性极限分析理论的对比分析, 可以发现: 两种方法得到的极限荷载和塑性区的分布吻合良好, 而且新单元法可以求出经典塑性极限分析理论难以得到的固体塑性区的发展过程及荷载位移曲线, 正方形板板底的屈服从板的中心开始沿对角线向四角发展, 最后达到极限荷载, 而矩形板板底的屈服从板的中部平行于长边方向往两端延长, 再沿大约  $45^\circ$  角的斜线方向往板的四角扩展, 最后达到极限荷载。

**关键词:** 塑性力学; 矩形板; 桁架单元; 极限分析

中图分类号: O344.5

文献标识码: A

文章编号:

### A new method of plastic limit analysis for rectangular plates

KE Jiang

(School of Civil Engineering and Architecture, Shaanxi University of Technology, Hanzhong 723001, China)

**Abstract:** Based on a new element model of solid body, the plastic limit analysis of plate is carried out. The new element model is a truss composed of 24 bars. Taking the simply supported square plate and rectangular plate under uniform load as an example, by comparing the new element method with the classical plastic limit analysis theory, it can be found that the limit load and the distribution of plastic zone obtained by the two methods are in good agreement. Moreover, the new element method can find out the development process of solid plastic zone and the load-displacement curve, which is difficult to get by the classical plastic limit analysis theory. The yielding of the bottom of the square plate is developed from the center of the plate to four corners along the diagonal line, and the limit load is reached. The yielding of the bottom of the rectangular plate extends from the middle of the plate to the two ends parallel to the long side, and then extends along the direction of the oblique line of about  $45^\circ$  angles to the four corners of the plate, finally, the limit load is reached.

**Key words:** plastic mechanics; rectangular plates; truss element; limit analysis

### 引 言

板是工程中广泛采用的结构类型, 求解板的极限荷载具有重大的实用意义。目前, 求解板极限荷载的主要方法是经典的塑性极限分析理论,

该理论假设材料是刚塑性的, 并按塑性变形规律研究结构达到塑性极限状态时的行为; 采用传统的三维实体单元或壳单元的有限元法, 虽然可以求解一般的弹塑性问题, 但还是难以解决理想弹塑性板的塑性极限荷载问题, 因为它无法获得合

理的荷载位移曲线及塑性区分布,进而求得极限荷载<sup>[1-4]</sup>。根据广义虎克定律和叠加原理,提出了一种各向同性的线弹性固体的新单元模型<sup>[5]</sup>,然后推广到正交各向异性、理想弹塑性、一般弹塑性材料<sup>[6-9]</sup>,通过新单元模型来求解弹性力学、塑性力学问题,并给出了一些算例的对比分析<sup>[9-12]</sup>,计算吻合良好。为了求解矩形板的塑性极限荷载,本文将通过新单元法与经典塑性极限分析理论进行具体算例的对比分析。

## 1 新单元法

由文献[5]和文献[9]可知:对于弹性力学、理想弹塑性的塑性力学的空间问题,基于正六面体微元与桁架单元的受力变形等效,建立了空间桁架单元新模型,如图1所示。本文中将与坐标轴平行的杆件称为“平行杆”,共12个;倾斜的杆件称为“斜杆”,共12个;当新单元模型在各坐标轴方向的尺寸相等时,平行杆的截面面积为 $A_1=0.1L^2$ ,斜杆的截面面积为 $A_2=0.2\sqrt{2}L^2$ , $L$ 为平行杆的长度。材料的屈服应力为 $\sigma_0$ ,泊松比 $\nu=0.25$ ,各杆件的弹性模量与材料的弹性模量相同,平行杆的屈服应力为 $\sigma_0$ ,而斜杆的屈服应力为 $3\sigma_0/8$ 。由新单元模型求弹塑性固体内任意点的应力、应变的计算方法为<sup>[9]</sup>:把弹塑性固体看作由许多新单元组成的桁架结构,通过计算这个桁架结构,可以得到各结点的位移,这些结点位移就作为固体内各点的位移,某点的应力可通过杆件的轴力求得;某点在不同方向的线应变可采用该位置处的杆件的线应变求得,剪应变则根据与线应变的关系求得(此外,结点的应变也可通过结点位移计算得出)。

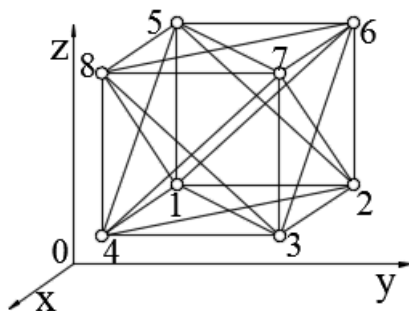


图1 空间桁架单元模型  
Fig. 1 Space truss element model

## 2 计算实例

本文选取了两个典型算例进行分析。在本文的计算中,统一规定:材料弹性模量 $E=2\times 10^5$

N/mm<sup>2</sup>,泊松比 $\nu=0.25$ ,屈服应力为 $300\text{ N}\cdot\text{mm}^{-2}$ 。采用新单元模型计算时,划分的每一个新单元在3个方向的尺寸均为 $10\text{ mm}$ ,平行杆的截面面积为 $10\text{mm}^2$ ,屈服应力为 $300\text{ N/mm}^2$ ;斜杆的截面面积为 $28.284\text{mm}^2$ ,屈服应力为 $112.5\text{ N}\cdot\text{mm}^{-2}$ ;板的顶面施加竖向均布荷载,板底面的四周采用简支支座;下面将采用Abaqus软件求解。

### 2.1 承受均布荷载作用的简支正方形板

简支正方形板的板厚为 $20\text{mm}$ ,其平面尺寸、荷载情况及塑性铰线分布见图2,图中, $q$ 为施加的均布荷载。正方形板的新单元模型见图3,板平面的 $X$ 、 $Y$ 方向分别划分为16个单元,板厚 $Z$ 方向划分为2个单元,故共划分为 $16\times 16\times 2=512$ 个单元。由于正方形板承受均布荷载,不能采用位移加载,必须采用力加载,所以无法绘制荷载位移曲线的水平段,Abaqus软件计算收敛的最后一个子步所对应的荷载,即为所能承受的极限荷载。根据图4所示的计算绘制的荷载位移曲线,可得新单元法计算得到的塑性极限荷载为 $q=29.96\text{N/mm}^2$ ,极限竖向位移 $U_z=1.02\text{ mm}$ ;在极限状态下,经典塑性极限分析理论计算塑性极限荷载的方法为 $q=6\sigma_0 h^2/a^2$ ,其中, $\sigma_0$ 为屈服应力, $h$ 为板厚的一半, $a$ 为正方形板边长的一半长度,将本算例中使用的数据代入后得到极限荷载为 $q=28.13\text{ N/mm}^2$ ,两种方法之间的偏差为 $6.11\%$ 。

采用新单元法,各级荷载作用下的板底受拉屈服杆件分布分别如图5所示。图中, $PE11$ 表示杆件的轴向塑性应变,即板内该点该方向的塑性应变。轴向塑性应变分布图(图5)表示了板内各点塑性应变的大小和方向,从图上可知均布荷载作用下简支正方形板板底的屈服的发展历程为从板的中心开始沿对角线向四角发展,最后达到极限荷载。对比可知,采用新单元法获得的极限荷载作用下的板底受拉屈服杆件分布规律(如图5c所示)与经典塑性极限分析理论的塑性铰线分布(如图2所示)规律非常吻合。新单元法在求解准确的基础上弥补了传统塑性力学方法难以求出塑性区的发展过程、塑性应变的大小及荷载位移曲线的问题。

此外,采用传统的三维实体单元有限元法或壳单元有限元法均无法正确求解理想弹塑性板的极限荷载,即使达到经典塑性极限分析理论的极

限荷载的 10 倍，绘制的荷载位移曲线仍然不断上升。

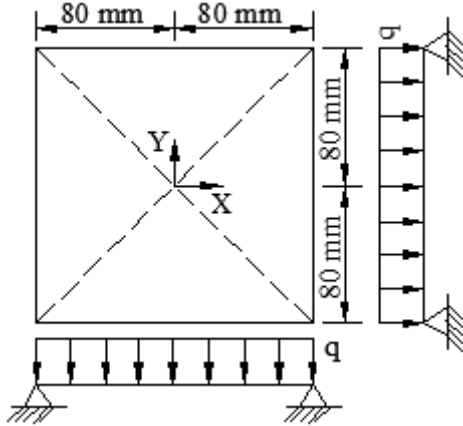


图 2 简支正方形板示意图及其塑性铰线分布  
Fig. 2 Schematic diagram of simply supported square plate and its plastic hinge lines distribution

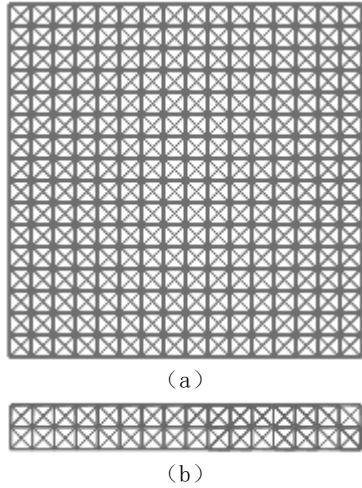


图 3 正方形板的新单元模型  
(a) XOY 坐标面视图 (b) XOZ 坐标面视图  
Fig. 3 New element model of square plate  
(a) XOY coordinate plane view (b) XOZ coordinate plane view

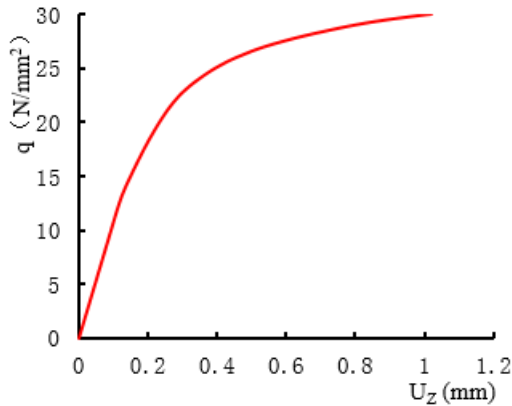


图 4 正方形板竖向均布荷载与中心点竖向位移关系曲线  
Fig. 4 Relationship curve between vertical uniform load and vertical displacement of center point for square plate

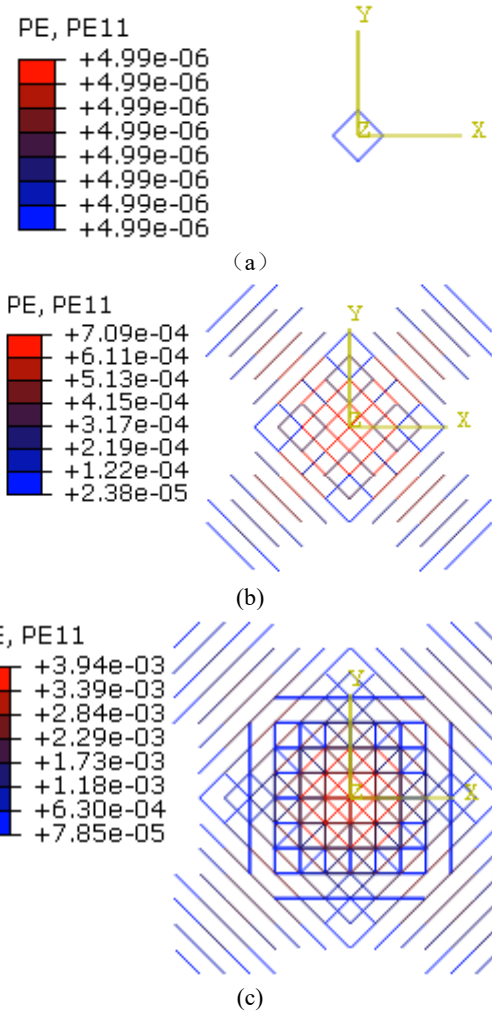


图 5 不同荷载下板底受拉屈服杆件轴向塑性应变分布  
(a)  $q=19.52 \text{ N/mm}^2$  (b)  $q=24.64 \text{ N/mm}^2$  (c)  $q=29.96 \text{ N/mm}^2$

Fig. 5 Axial direction plastic strain distribution of tensile yield bars at plate bottom under different uniform load

## 2.2 承受均布荷载作用的简支矩形板

板厚 20mm 的简支矩形板的平面尺寸、荷载情况及塑性铰线分布如图 6 所示。矩形板的新单元模型见图 7，共划分为  $16 \times 32 \times 2 = 1024$  个单元。根据图 8 所示的计算绘制的荷载位移曲线可得新单元法计算得到的塑性极限荷载为  $q=15.64 \text{ N/mm}^2$ ，极限竖向位移  $U_z=0.542 \text{ mm}$ ；在极限状态下，经典塑性极限分析理论计算极限荷载的方法为<sup>[2]</sup>：为  $q = \eta \times 24 \sigma_0 h^2 / L^2$ ，其中，当矩形板的短边与长边的比值为 0.5 时，系数  $\eta$  取 2.05， $L$  为矩形板长边的长度。将本文数据代入计算得到  $q=14.41 \text{ N/mm}^2$ ，两种计算方法所得结果的偏差为 7.86%。

采用新单元法，各级荷载作用下的板底受拉屈服杆件分布见图 9，可知均布荷载作用下简支矩形板板底的屈服从板的中部平行于长边方向往

两端延长，再沿小于 $45^\circ$ 角的斜线方向往板的四角扩展，最后达到极限荷载，其中，极限荷载作用下（图9c）的板底受拉屈服杆件分布规律与经典塑性极限分析理论的塑性铰线分布（图6）规律非常吻合。

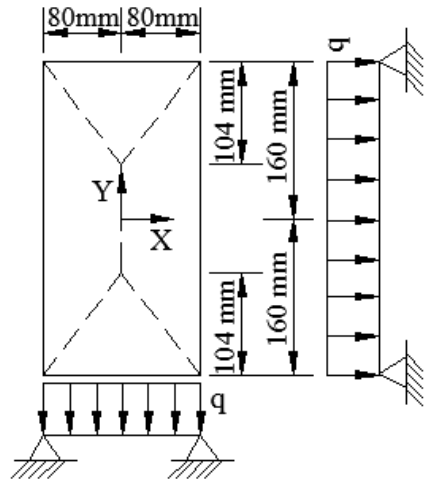


图6 简支矩形板示意图及其塑性铰线分布  
Fig. 6 Schematic diagram of simply supported rectangular plate and its plastic hinge lines distribution

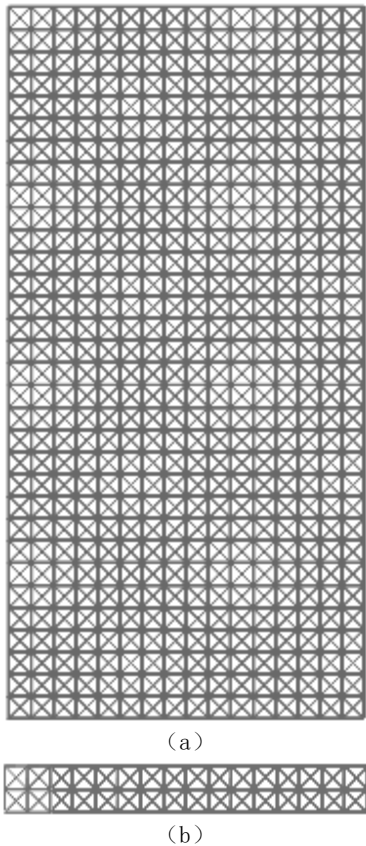


图7 矩形板的新单元模型  
(a) XOY 坐标面视图 (b) XOZ 坐标面视图  
Fig.7 New element model of the rectangular plate  
(a) XOY coordinate plane view (b) XOZ coordinate plane view

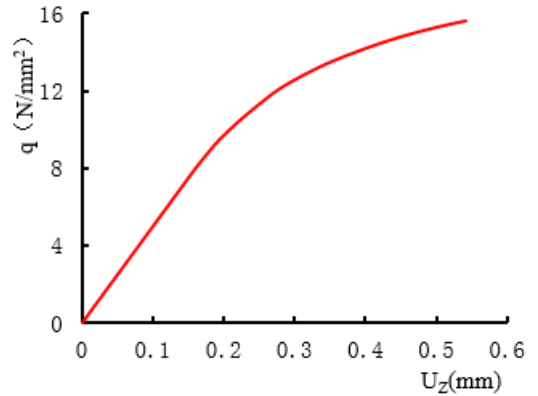


图8 矩形板的竖向均布荷载与中心点的竖向位移关系曲线

Fig. 8 Relationship curve between vertical uniform load and vertical displacement of center point for rectangular plate

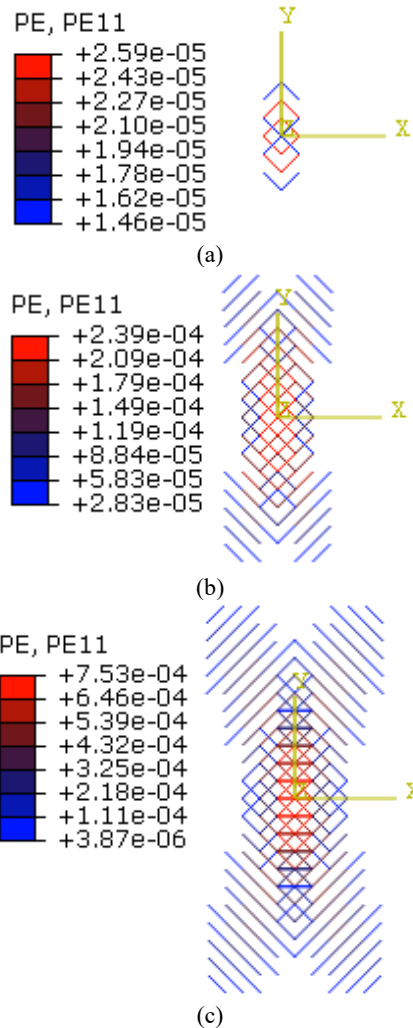


图9 板底受拉屈服杆件轴向塑性应变分布  
(a)  $q=13.40 \text{ N/mm}^2$  (b)  $q=14.40 \text{ N/mm}^2$  (c)  $q=15.64 \text{ N/mm}^2$

Fig. 9 Distribution of tensile yield bars at the plate bottom under different uniform load

## 2.3 存在的问题及解决方法

文献[9]中提出的理想弹塑性固体的新单元模型有时会在一个问题：固体局部应力非常集

中时, 导致该局部的杆件受压屈服后无法传递更大荷载, 以致计算失败。此时, 可采用文献[8]提出的一般塑性材料的新单元模型, 即材料单轴受压应力应变曲线的水平屈服段之后有一个二次上升段, 优先采用位移加载方式, 可绘制计算得到的荷载位移曲线, 该曲线水平段所对应的荷载就是梁、框架或矩形板等的塑性极限荷载。如果是采用力加载方式, 只要选取的材料单轴受压应力应变曲线的水平屈服段比较长, 则计算收敛的最后1个子步所对应的荷载, 就是所求的塑性极限荷载, 这样, 就解决了文献[9]中的新单元模型存在的问题, 而且计算精度很高。

### 3 结 论

(1) 在理论上和工程应用中, 板的塑性极限分析都具有重大的意义。本文通过新单元法与经典塑性极限分析理论的对比分析, 可以发现两种方法得到的极限荷载、塑性区的分布规律吻合良好, 而且新单元法可以求出经典塑性极限分析理论难以得到的固体内塑性区的发展过程及荷载位移曲线。

(2) 新单元法在弹性力学、塑性力学、各项工程领域具有非常广泛的用途, 可以得到传统的固体力学各种方法难以得到的一些计算结果。当然, 展示这些成果需要完成大量的工作, 目前, 优先的任务是揭示新单元模型的一些独特的应用价值。

### 参考文献:

- [1] 王仁, 黄文彬, 黄筑平. 塑性力学引论 [M]. 北京: 北京大学出版社, 1992.  
WANG Ren, HUANG Wenbin, HUANG Zhuping. Introduction to plasticity [M]. Beijing: Peking University Press, 1992.
- [2] 徐秉业, 刘信声. 结构塑性极限分析 [M]. 北京: 中国建筑工业出版社, 1985.  
XU Bingye, LIU Xinsheng. Plastic limit analysis of structure [M]. Beijing: China Architecture & Building Press, 1985.
- [3] 汪建强, 郭丽丽, 李永兵, 等. 6016 铝合金板材室温成形性及其数值模拟 [J]. 塑性工程学报, 2018, 25 (2): 43-51.  
WANG Jianqiang, GUO Lili, LI Yongbing, et al. Formability and numerical simulation of 6016 aluminum alloy sheet at room temperature [J]. Journal of Plasticity Engineering, 2018, 25 (2): 43-51.
- [4] 宋坤, 武凯, 刘庆印, 等. 四辊卷板成形过程理论分析与数值仿真 [J]. 锻压技术, 2017, 42 (1): 137-142.  
Song Kun, Wu Kai, Liu Qingyin, et al. Theoretical analysis and numerical simulation on four-roll rolling process [J]. Forging & Stamping Technology, 2017, 42 (1): 137-142.
- [5] 柯江. 实体结构求解的新方法 [J]. 山西建筑, 2008, 34(9):112-113.  
KE Jiang. The new method to solve solid structure [J]. Shanxi Architecture, 2008, 34(9):112-113.
- [6] KE J. A new element model of solid bodies [J]. Applied Mechanics and Materials, 2012, 174-177: 2115-2118
- [7] 柯江. 弹塑性固体的新单元模型 [J]. 山西建筑, 2016, 42(31):46-47.  
KE Jiang. A new element model of elastic-plastic solid bodies [J]. Shanxi Architecture, 2016, 42(31):46-47.
- [8] 柯江. 钢材弹塑性分析的新模型 [J]. 山西建筑, 2017, 43(14):23-25.  
KE Jiang. A new model for elasto-plastic analysis of steel [J]. Shanxi Architecture, 2017, 43(14):23-25.
- [9] 柯江. 基于固体新单元模型分析理想弹塑性问题 [J]. 山西建筑, 2012, 38(36):42-43.  
KE Jiang. Analysis on elastic perfectly-plastic problems based on new solid element model [J]. Shanxi Architecture, 2012, 38(36):42-43.
- [10] 柯江. 正交各向异性新模型在平面应力问题中的应用 [J]. 山西建筑, 2013, 39(19):18-20.  
KE Jiang. Application of new orthotropic model in plane stress problems [J]. Shanxi Architecture, 2013, 39(19):18-20.
- [11] 柯江. 基于新模型求解平面应变问题 [J]. 低温建筑技术, 2014, 36(8):92-94.  
KE Jiang. Solution of plane strain problems based on a new model [J]. Low Temperature Architecture Technology, 2014, 36(8):92-94.
- [12] 柯江. 梁和框架塑性极限分析的新方法 [J]. 山西建筑, 2013, 39(16):40-41.  
KE Jiang. A new method of plastic limit analysis for beams and frames [J]. Shanxi Architecture, 2013, 39(16):40-41.